Devoir surveillé n^{o} 4 bis

Vendredi 9 janvier

Le sujet comporte 6 pages et est composé d'un problème et d'un exercice indépendants.

Les calculatrices sont interdites.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Approximation par des exponentielles-polynômes

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \to \mathbf{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

2) À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(1 - x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5) Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6) Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

7) Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

9) En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.

10) En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

11) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12) Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

13) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

14) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \text{ pour tout } f \in E_\alpha.$$

15) Soit n un entier ≥ 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers 0 par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ quand } x \to +\infty.$$

16) Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

17) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19) En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0,1] \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \to \mathbf{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

22) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ ($A > 0$). Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question **22)** à la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto h\left(\sqrt{x}\right) e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

*On peut montrer que le résultat de la question **23)** est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.*

FIN DU PROBLÈME

Exercice 2. Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford (*d'après Centrale PC 2024*)

Notations générales et définitions

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.
Étant donné une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle *racine carrée* de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de M.
On dit qu'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ *converge* vers $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ si et seulement si, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$.
On pourra utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet le résultat suivant : si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA.

Cadre de l'exercice

On fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i).$$

On note P' le polynôme dérivé de P.

Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) | Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :

- si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors A et B commutent, et $A + B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;
- Si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

A - Une méthode de Newton matricielle

Q1. Montrer que, pour toute racine complexe μ de P', la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

Q2. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- M_n est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$;
- il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = \big(P(M)\big)^{2^n} B_n$;
- la matrice $P'(M_n)$ est inversible

Q3. Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

Q5. On note A la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que A est diagonalisable.

Q6. On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

B - Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables

Q7. En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q8. En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On considère alors les matrices A et N introduites dans la partie précédente.

Q9. Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q10. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q11. On **admet** qu'on peut alors construire une racine carrée A' de A vérifiant $A' \in \mathbb{C}[A]$.
En déduire l'expression d'une racine carrée de M.